Тема 6. Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных

Двойные интегралы

Пусть функция f(x,y) определена в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy. Разобьём область D произвольном образом на n элементарных областей, имеющих площадь $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, …, $\Delta\sigma_n$ и диаметры d_1, d_2, … , d_n (диаметром области называется наибольшее из расстояний между двумя точками границы этой области). Выберем в каждой элементарной области произвольную точку $P_\kappa(\xi_\kappa;\eta_\kappa)$ и умножим значение функции в точки P_κ на площадь этой области.

Интегральной суммой для функции f(x,y) по области D называется сумма вида

$$\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa,\eta_\kappa)\Delta\sigma_\kappa = f(\xi_1,\eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2,\eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n,\eta_n)\Delta\sigma_n.$$

Если при $\max d_\kappa \to 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный предел

$$I = \lim_{\max d_\kappa \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_n,\eta_n)\Delta\sigma_\kappa,$$

не зависящий от способа разбиения D на элементарные области и от выбора точек P_κ в пределах каждой из них, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции f(x, y) в области D и обозначается следующим образом:

$$I = \iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\max d_\kappa \to 0}\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa.\eta_\kappa)\Delta\sigma_\kappa.$$

Если f(x,y)>0 в области D, то двойной интеграл $\iint_D f(x,y)d\sigma$ равен *объему цилиндрического тела,* ограниченного сверху поверхностью z = f(x,y), сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz, и снизу областью D плоскости xOy.

Основные свойства двойного интеграла:

1. $\iint_D [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]d\sigma = \iint_D f_1(x,y)d\sigma \pm \iint_D f_2(x,y)d\sigma.$

2. $\iint_D cf(x,y)d\sigma = c\iint_D f(x,y)d\sigma$, где c – постоянная.

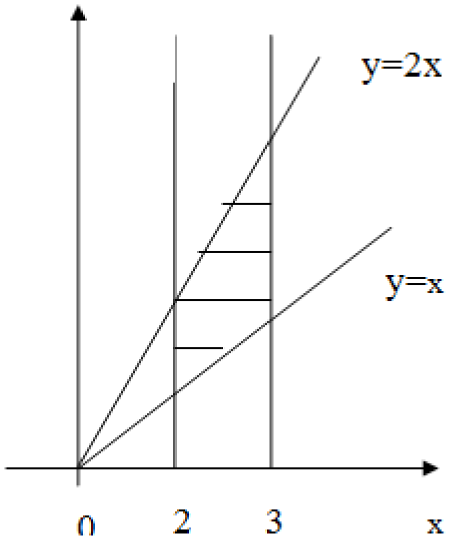
3. Если область интегрирования D разбита на две области D_1 и D_2, то

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

4. *Оценка двойного интеграла***.** Если m ≤ f(x,y) ≤ M, то $mS \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS$, где S – площадь области D, а m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x,y)в области D.

Пример 1. Вычислить $\iint_D (x+2y)dxdy$,если область D ограничена прямыми y = x, y = 2x, x =2, x =3.

Решение. Вначале построим заданную область D (рис.14). Как видно



из графика

D = $\{(x,y)\in R^2 : 2\le x\le 3,\ x\le y\le 2x\}$.

Тогда $\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_2^3 dx \int\limits_x^{2x} (x+2y)dy =$

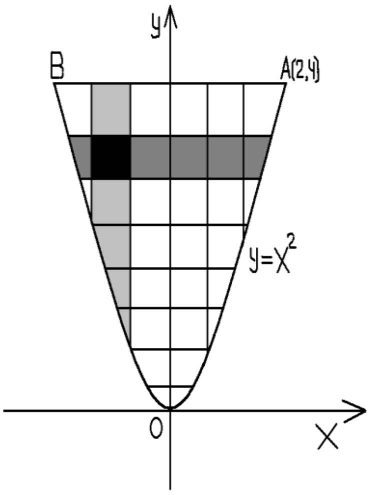
$\int\limits_2^3 (xy+y^2)\Big|_x^{2x} dx = = \int\limits_2^3\int\limits_2^3 (2x^2+4x^2-x^2-x^2)dx =$

$4\int\limits_2^3 x^2dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3$ = 25 $\frac{1}{3}$.

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

I 1= $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy$.

Решение. Вначале по пределам интегрирования определяем область интегрирования. Полагая **x** равным пределам интеграла с переменной **x**, а **y** равным пределам интеграла с переменной **y**, получим уравнения линий, ограничивающих эту область: x = –2, x = 2, y = x^2, y = 4.



Построив эти линии, получим параболический сегмент OAB, симметричный оси O Y (рис.15).

Интегрируем в другом порядке – вначале по **x**, затем по **y**. Пределы внутреннего интеграла находим, разрешая относительно **x** уравнение параболы x = $-\sqrt{y}$ и x = $\sqrt{y}$. Пределы внешнего интеграла y = 0 и x = 4 находим как наименьшее и наибольшее значение y во всей области OAB. Следовательно,

$$\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)dy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Двойной интеграл в полярных координатах. Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x, y к полярным координатам ρ, θ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями

x = r cosφ, y = r sinφ,

осуществляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, drd\varphi.$$

Пример 3. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$, если D – I четверть круга $x^2+y^2\le 1$.

Решение. Полагая x = r cosφ, y = r sinφ, имеем уравнение окружности $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 1$ или r = 1, тогда

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\, r dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Вычисление площади плоской фигуры. ***Площадь плоской фигуры, ограниченной областью D, находится по формуле***

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Если область D определена, например, неравенствами $\alpha \le X \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, то

$$S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$$

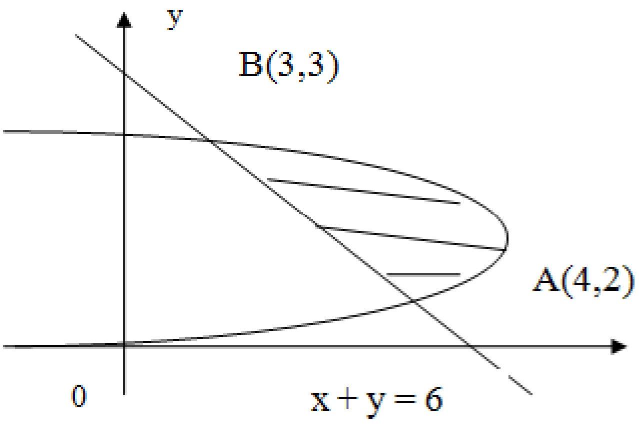
Если область D в полярных координатах определена неравенствами $\alpha \le 0 \le \beta, \psi(\varphi) \le r \le f(\varphi)$, то

$$S = \iint\limits_D r dr d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\psi(\varphi)}^{f(\varphi)} r dr.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$x = 4y - y^2$, x + y = 6.

Решение. Построим данную область Д: $x = 4y - y^2$, x + y = 6 (рис.16). Найдем координаты точек пересечения заданных линий, решая систему уравнений: $x = 4y - y^2$ и x + y = 6. В результате получим A(4;2), B(3;3). Таким образом, D= $\{(x,y) \in R^2 : 2 \le y \le 3,$ $6 - y \le x \le 4y - y^2\}$ и площадь области равна:



$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int\limits_2^3 (4y - y^2 - 6 + y)\,dy = \int\limits_2^3 \left(-y^2 + 5y - 6\right) dy =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y\right)\Big|_2^3 = \frac{1}{6}$$ (кв.ед.).

Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл 1 – го рода. Пусть функция f(x,y) определена и непрерывна в точках дуги AB гладкой кривой L. Разобьём дугу AB произвольным образом на n элементарных дуг точками $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, имеющих длину $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$,

…, $\Delta\sigma_n$. Выберем на каждой элементарной дуге произвольную точку $P_\kappa(\xi_\kappa;\eta_\kappa)$ и умножим значение функции в точки P_κ на длину соответствующей дуги.

Интегральной суммой для функции f(x,y) по длине дуги AB называется сумма вида

$$\sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_\kappa,\eta_\kappa)\Delta\sigma_\kappa = f(\xi_1,\eta_1)\Delta\sigma_1 + f(\xi_2,\eta_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(\xi_n,\eta_n)\Delta\sigma_n .$$

Если при max $\sigma_\kappa \to 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный предел

$$I = \lim_{\max d_\kappa \to 0} \sum_{\kappa=1}^{n} f(\xi_n,\eta_n)\Delta\sigma_\kappa ,$$

то этот предел называется *криволинейным интегралом* по длине дуги AB от функции f(x, y) и обозначается следующим образом:

$$\int_{AB} f(x,y)d\sigma = \lim_{\max\Delta\sigma_k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k .$$

Если кривая задана уравнением y = φ(x) (a ≤ x ≤ в), то

$$\int_{AB} f(x,y)d\sigma = \int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx .$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями x = x(t), y = y(t) (α≤ t ≤ β), то

$$\int_{AB} f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt .$$

Основные свойства криволинейного интеграла 1 – го рода:

1. Криволинейный интеграл 1 – го рода не зависит от направления пути интегрирования: $\int_{AB} f(x,y)d\sigma = \int_{BA} f(x,y)d\sigma$.

2. $\int_{AB}(f_1(x,y)+f_2(x,y))d\sigma = \int_{AB} f_1(x,y)d\sigma + \int_{AB} f_2(x,y)d\sigma$.

3. $\int_{AB} kf(x,y)d\sigma =$ к $\int_{AB} f(x,y)d\sigma$, где к – константа.

4. Если К = $K_1 \cup K_2$, то $\int_K f(x,y)d\sigma = \int_{K_1} f(x,y)d\sigma + \int_{K_2} f(x,y)d\sigma$.

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_L y d\sigma$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки (0,0) до точки $(4, 2\sqrt{2})$.

Решение. Здесь линию удобно задать в форме, разрешенной относительно x: $x = \frac{y^2}{2}$. Тогда $x' = y$ и интеграл преобразуется к виду $\int_L y d\sigma = \int_0^{2\sqrt{2}} y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{(1+y^2)^{3/2}}{3}\Big|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{26}{3}$.

Криволинейный интеграл 2 – го рода. Пусть функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны в точках дуги AB гладкой кривой AB. Интегральной суммой для функций P(x,y) и Q(x,y) по координатам называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k ,$$

где $\Delta_к$ и $\Delta_к$ – проекции дуги на оси Ox и Oy.

Криволинейным интегралом по координатам от выражения P(x,y)dx+ +Q(x,y)dy по направленной дуге AB называется предел интегральной суммы при условии, что max $\Delta x_к \to 0$ и max $\Delta y_к \to 0$:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ \max \Delta y_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k .$$

Если кривая задана уравнением y = φ(x) (a ≤ x ≤ в), то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x, \varphi(x)) + \varphi'(x)Q(x, \varphi(x)))dx .$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями x = x(t), y = y(t) (α≤ t ≤ β), то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt .$$

Основные свойства криволинейного интеграла 2 – го рода. Криволинейный интеграл 2 – го рода меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Остальные свойства аналогичны свойствам интеграла 1 – го рода.

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_L xydx + (x-y)dy$, принимая за линию L:

1) отрезок прямой, соединяющий точки O (0,0) и A(1,1);
2) дугу параболы y = x^2, соединяющей эти же точки.

Решение:

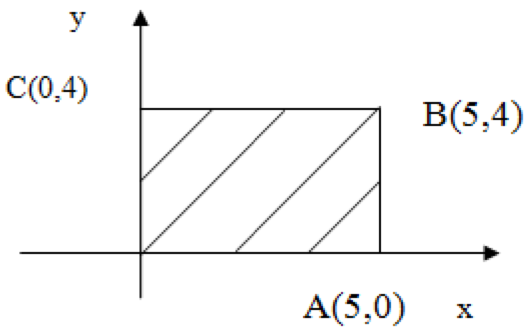
1. Уравнение линии интегрирования y = x. Следовательно, dy = dx и $\int_L xydx + (x-y)dy$ $= \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

2. y = x^2, dy = 2xdx и $\int_L xydx + (x-y)dy = \int_0^1 (x^3 + (x - x^2)2x)dx = \int_0^1 (2x^2 - x^3)dx =$ $\left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

Криволинейные интегралы по замкнутому множеству обозначим символом $\oint_L$. В случае замкнутого контура на плоскости направление обхода, при котором область, ограниченная контуром, остается слева (обход контура совершается против хода часовой стрелки), называется положительным.

Формула Грина. Если функции P(x,y) и Q(x,y) непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Д, то имеет место формула

$$\iint_{Д} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{L} Pdx + Qdy,$$



где L – граница области Д, и интегрирование вдоль L производится в положительном направлении.

Пример 7. Применяя формулу Грина, вычислить интеграл $\oint_{L} (x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$, где L – контур прямоугольника с вершинами O (0,0), A(5,0), B(5,4) и C(0,4).

Решение. Так как P(x,y) = x^2+y^2, Q(x,y) = $(x+y)^2$, то $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = 2(x+y) - 2x = 2y$. Таким образом $\oint_{L} (x^2 + y^2)dx + (x+y)^2 dy$ = $\iint_{Д} 2ydxdy$ = I, Д – область прямоугольника ОАВС (рис.17).

Вычислим двойной интеграл по данной области Д:

Д= $\{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 5, 0 \le y \le 4\}$.

$$I = 2\int_0^5 dx \int_0^4 ydy = 2 \cdot 5 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = 10 \cdot 8 = 80.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется двойным интегралом от функции по данной области?
2. Перечислить свойства двойного интеграла.
3. Как вычисляется двойной интеграл в декартовой системе координат? В полярной?
4. Геометрическое и физическое применение двойного интеграла.
5. Что называется тройным интегралом от функции по данной области?
6. Как вычисляется тройной интеграл в декартовой системе координат? В цилиндрической системе? В сферической системе?
7. Перечислить свойства тройного интеграла.
8. Геометрическое и физическое применение тройного интеграла.
9. Что называется криволинейным интегралом 1 – го и 2– го рода? Как они вычисляются?
10. Сформулировать свойства криволинейных интегралов.
11. Сформулировать теорему Грина.
12. Как влияет направление интегрирования на величину криволинейного интеграла?
13. Что означает независимость криволинейного интеграла от линии интегрирования.
14. Применение криволинейных интегралов.